



## 第4章 附加材料

### — 簡介 —

我們的課程特意設置得簡潔明了，如果您希望有更多示例和討論來幫助您更好地理解課程內容，那麼您來對地方了！本文檔包含第4章課程中某些遊戲的補充材料。

我們給出了許多已解決難題的示例，以及有關如何設計有序的附加說明。早期家庭數學計劃基於這樣的理念，即早期數學是家庭應該一起做的事情，而讓孩子與您一起做謎題是該過程的重要組成部分。一旦掌握了每個遊戲，您應該會發現，即使不是全部，大多數遊戲也很容易設計。

其中的遊戲各具有不同的級別的難度。在接下來的內容中，有許多關於如何設計這些級別遊戲的建議和示例。始終從最簡單的遊戲開始。讓您的孩子通過簡單的遊戲來體驗成功和學習的樂趣，比從一開始就接觸過於困難的遊戲而導致沮喪要好得多。一旦您的孩子對數學建立了信心和產生了興趣，就可以慢慢增加難度了。值得一提的是，並非所有遊戲都符合每個人的興趣，因此不必要求孩子完成所有遊戲。

本章节包含以下內容：

- 第4章—封閉區域求和
- 第4章—島嶼穿梭：補償法
- 第4章—差值三角與求和三角
- 第4章—島嶼穿梭：跳數計數
- 第4章—數字修復
- 第4章—島嶼穿梭：個位與十位加減
- 第4章—紙牌形狀難題
- 第4章—數字方陣求和
- 第4章—加法金字塔
- 第4章—探索活動

---

### — 法律資料 —

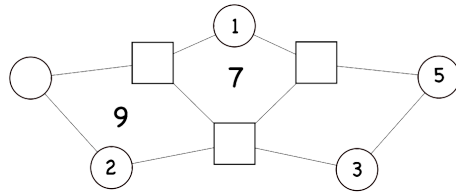
每個家庭都應該有機會一起學習和享受數學。為此，“早期家庭數學”是一系列材料，家庭和教育工作者可以在未經徵得許可的情況下自由地編輯，翻譯，複製和分發，僅用於非商業用途。

©早期家庭數學版權所有- 2025 v. 1.0創用CC: Attribution-NonCommercial 4.0國際許可

## 第4章—封閉區域求和

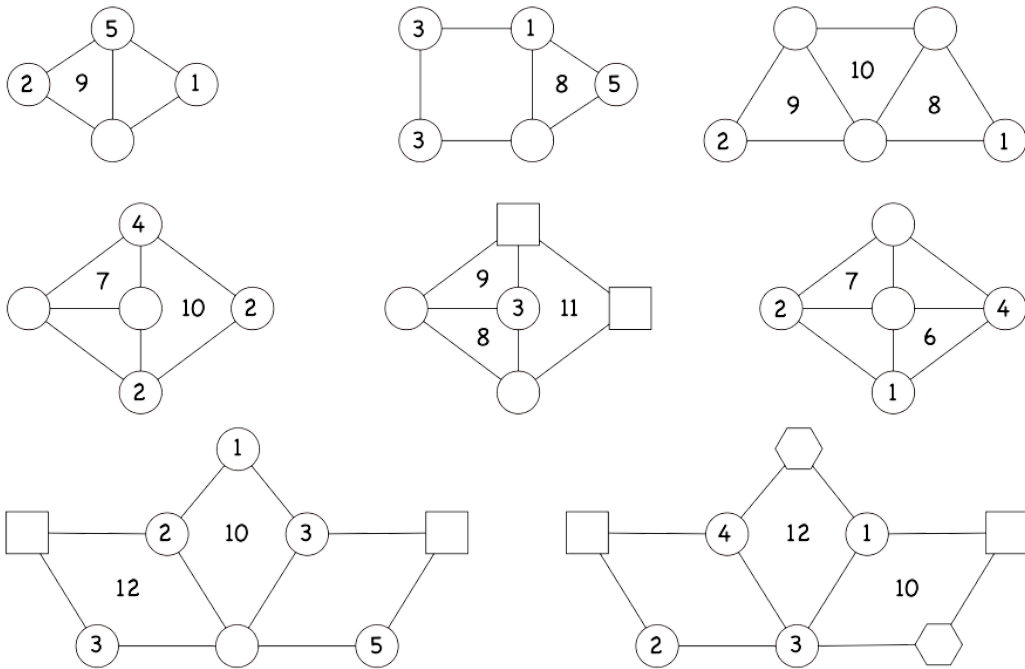
這類謎題由線條連接各種形狀構成。每個封閉區域內標示的數字，代表其邊界上所有形狀內數值的總和。與第三章的「形狀求和」謎題相似，圓形內的數值可以是任意值，而非圓形狀（如正方形、六邊形）則必須遵循相同形狀數值一致的規則——例如所有正方形內的數值必須相同，所有六邊形內的數值也必須相同。您亦可選擇性增加規則：要求不同類型的非圓形狀必須具有不同數值（例如正方形與六邊形的數值不可相同）。

孩子的任務是推算出未標示數值的形狀與區域內應填的數字。



設計此類謎題時，請先繪製由圓形及其他形狀組成的結構圖，接著為所有形狀填入具體數字，並計算每個封閉區域的邊界數值總和，最後隱去部分數字作為題目空白。

如同第三章的「形狀求和」謎題，建議從僅缺失一兩個數字的簡單題型開始，逐步增加難度：隱藏更多數字、設計更多相鄰的封閉區域，並加強運用非圓形狀的數值關聯性。



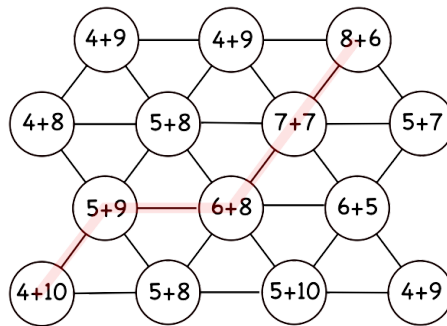
## 第4章—島嶼穿梭：補償法

運用補償法進行加法運算，能讓計算過程變得更加簡便。其核心概念是：從一個加數中取出部分數量，轉移給另一個加數——總和保持不變，但其中一個數字會變得更容易計算。

例如計算  $7+8$  時，若從 7 取出 2 給 8，題目即轉換為  $5+10$ ；反之，若從 8 取出 3 給 7，則變成  $10+5$ 。只要能使其中一個加數變成 10 的倍數，就能大幅簡化運算。

這類謎題旨在訓練運用補償法轉換算式的能力。挑戰目標是找出一條能連接所有答案相同島嶼的路徑，但只有當兩個島嶼的算式數字相差為 1 時才能相連，且僅部分島嶼會位於正確路徑上。

設計此類謎題時，可先佈置約十個具備部分連接關係的島嶼，規劃一條從島群一端通往另一端的路徑。沿該路徑設置數字相差為 1 的算式（例如從含 10 的加法開始逐步變化），而在路徑附近的島嶼則安排答案不同的相似算式。

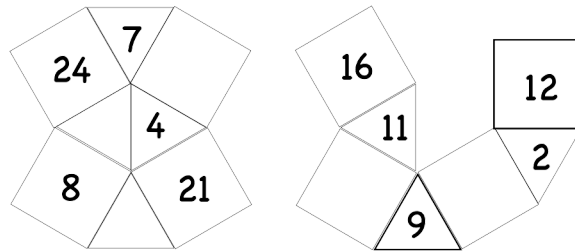


此類謎題的難度調整空間有限。刻意設置誤導路徑往往只會造成混亂而非提升挑戰性，通常不建議採納此種設計方式。

# 第4章-差值三角與求和三角

## — 差值三角謎題 —

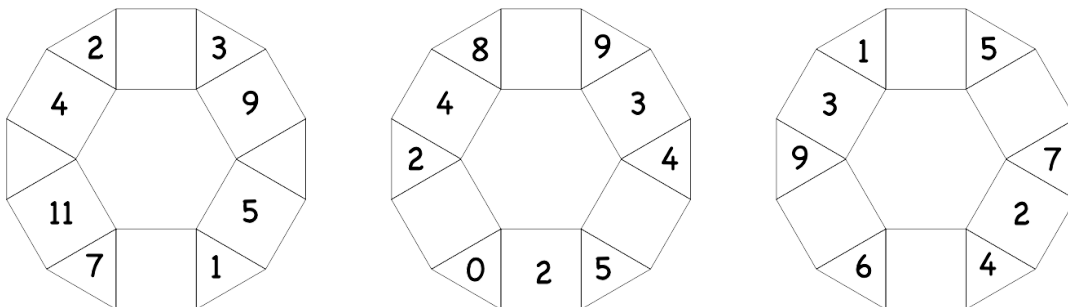
這類謎題由共享邊長的三角形與正方形構成。每個三角形必定與兩個正方形相鄰，第三邊則連接另一個三角形或留空。三角形內的數字等於其相鄰兩個正方形內數值的差值，玩家的任務是推算出所有空缺的數字。



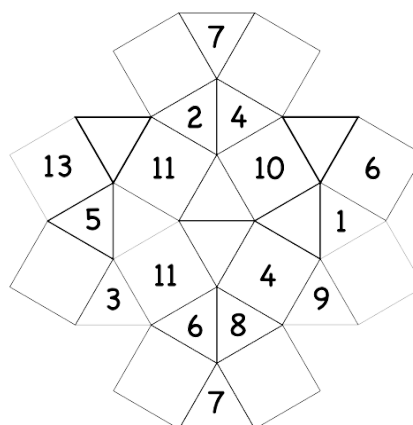
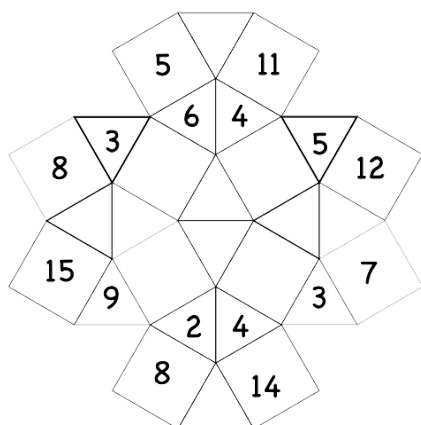
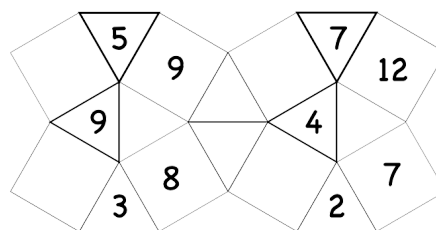
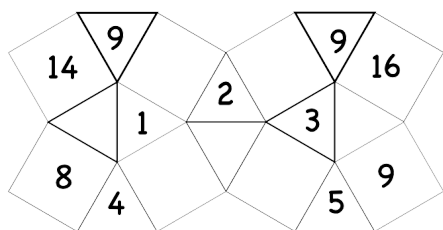
**謎題設計技巧:**設計無循環結構的謎題較為簡單:先繪製正方形與三角形交替組成的鏈條,從一端開始填入數字並逐步推導至末端,最後隱去部分數字即可。若要設計帶有循環結構或複雜交互的謎題則需要更多技巧,但往往能創造出極具挑戰性的精彩謎題!

當孩子熟練掌握解題後,可以嘗試親自設計新謎題。透過梳理數字間的關聯性,他們將在創造過程中獲得樂趣與成長。

**解題策略:**建議優先處理位於兩個已填數字正方形之間的三角形。另一種簡單情況是:當某個已填數字的三角形旁有一個已填數字且數值較小的正方形時,由於不涉及負數,此時空缺正方形的數值只有唯一解。最常見的情況是某個正方形從不同方向推導會得出兩種可能數值,而通常只有一個數字能同時滿足兩邊的條件。

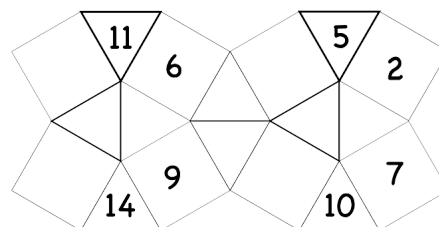
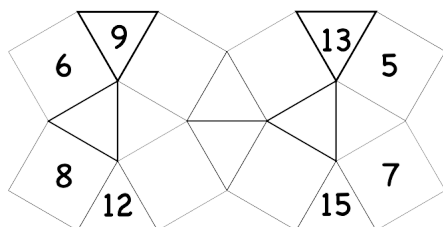
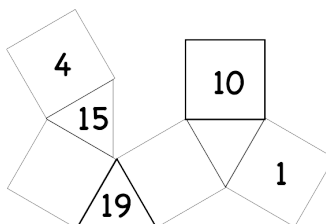
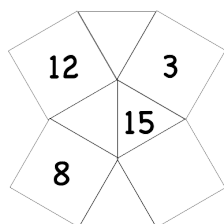


以下提供幾個具有複雜連結結構的範例。



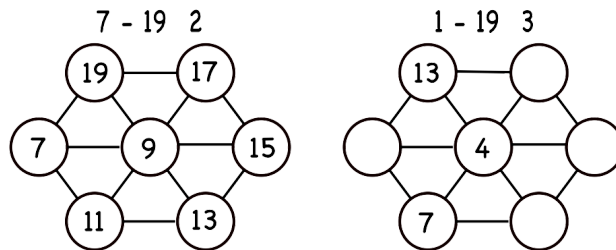
### — 求和三角謎題 —

此類謎題與差值三角謎題結構相似，但將運算規則改為加法：三角形內的數值等於其相鄰兩至三個正方形內數值的總和。您可運用與設計差值三角謎題類似的方法來創建這類題目。通常求和三角謎題會比差值三角謎題更容易求解。



## 第4章—島嶼穿梭：跳數計數

這類謎題由代表島嶼的圓圈與代表橋樑的線條構成。在此版本的島嶼穿梭中，連接關係是透過跳數計數建立的。部分島嶼上標有數字，部分則為空白。謎題上方會標明起始數字、終點數字與跳數間隔。挑戰目標是填補空白數字並找出正確路徑。您也可以將數字與空白寫在紙片上置於地面，轉化為實體跳格遊戲。

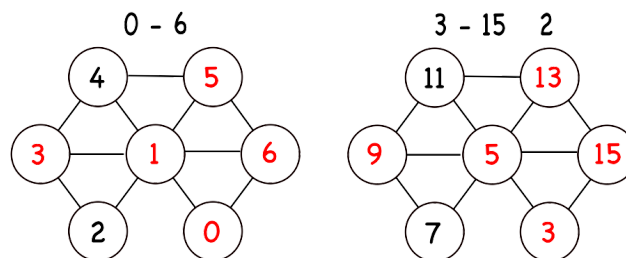


如同跳數計數活動，設計謎題時應練習從各類數字開始向前或向後計數，而不僅限於跳數間隔的倍數。

創建此類謎題的方法與第二章初期的「島嶼穿梭：計數」謎題相同：先繪製島嶼，填入跳數序列，按正確順序連接這些島嶼，再添加額外連接線以增加解謎難度。提供給孩子時，需隱去部分數字，但保留足夠線索使其仍可推導解答。

您可參考第二章補充資料中關於「島嶼穿梭：計數」的謎題建構策略。若仍保留當時的謎題，只需簡單轉換即可生成新題目：以第二章某題（從0數到6，標紅數字通常隱去）為例，若要改為「從3開始間隔為2」的跳數謎題，只需將所有數字先乘以2再加3（如下表所示），最後用新數字替換原數字（當然仍隱去標紅部分）。

	0	1	2	3	4	5	6
馬爾他由2	0	2	4	6	8	10	12
加3	3	5	7	9	11	13	15



# 第4章-數字修復

準備一個 4x4 的數字網格與一個目標總和。挑戰目標是：移除部分格子中的數字，使每行與每列剩餘數字的總和均等於該目標值。進階版本則可為每行每列設定不同的目標總和。

設計此類謎題時，可先填入能組成目標總和的數字對或數字組，再於其餘空格填入干擾數字。若想增加難度，可安排部分符合條件的替代數字組合。若孩子喜愛此類謎題但覺得過於簡單，可擴展為 4x5、5x5 或更大尺寸的網格。

此處添加的紅色星號標示了需移除的數字，以達成解題條件。

8																
<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 40px; height: 40px;"> <tr><td style="text-align: center;">6★</td><td style="text-align: center;">3</td><td style="text-align: center;">5</td><td style="text-align: center;">2★</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">2</td><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">4★</td><td style="text-align: center;">5</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">3★</td><td style="text-align: center;">4</td><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">3</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">6</td><td style="text-align: center;">4★</td><td style="text-align: center;">2</td><td style="text-align: center;">5★</td></tr> </table>	6★	3	5	2★	2	1	4★	5	3★	4	1	3	6	4★	2	5★
6★	3	5	2★													
2	1	4★	5													
3★	4	1	3													
6	4★	2	5★													

9																
<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 40px; height: 40px;"> <tr><td style="text-align: center;">7</td><td style="text-align: center;">4★</td><td style="text-align: center;">5★</td><td style="text-align: center;">2</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">2</td><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">4★</td><td style="text-align: center;">6</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">3★</td><td style="text-align: center;">4</td><td style="text-align: center;">4</td><td style="text-align: center;">1</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">6★</td><td style="text-align: center;">4</td><td style="text-align: center;">5</td><td style="text-align: center;">3★</td></tr> </table>	7	4★	5★	2	2	1	4★	6	3★	4	4	1	6★	4	5	3★
7	4★	5★	2													
2	1	4★	6													
3★	4	4	1													
6★	4	5	3★													

10																
<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 40px; height: 40px;"> <tr><td style="text-align: center;">3</td><td style="text-align: center;">3</td><td style="text-align: center;">6★</td><td style="text-align: center;">4</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">7</td><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">2</td><td style="text-align: center;">6★</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">4★</td><td style="text-align: center;">6</td><td style="text-align: center;">1★</td><td style="text-align: center;">4</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">6★</td><td style="text-align: center;">4★</td><td style="text-align: center;">8</td><td style="text-align: center;">2</td></tr> </table>	3	3	6★	4	7	1	2	6★	4★	6	1★	4	6★	4★	8	2
3	3	6★	4													
7	1	2	6★													
4★	6	1★	4													
6★	4★	8	2													

11																
<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 40px; height: 40px;"> <tr><td style="text-align: center;">8</td><td style="text-align: center;">3</td><td style="text-align: center;">5★</td><td style="text-align: center;">4★</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">1★</td><td style="text-align: center;">1★</td><td style="text-align: center;">4</td><td style="text-align: center;">7</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">3</td><td style="text-align: center;">8</td><td style="text-align: center;">1★</td><td style="text-align: center;">3★</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">7★</td><td style="text-align: center;">5★</td><td style="text-align: center;">7</td><td style="text-align: center;">4</td></tr> </table>	8	3	5★	4★	1★	1★	4	7	3	8	1★	3★	7★	5★	7	4
8	3	5★	4★													
1★	1★	4	7													
3	8	1★	3★													
7★	5★	7	4													

以下提供兩個範例，分別為每行每列設置了獨立目標總和。

6	3	7	8★	16
2★	1★	4	5	9
3★	4★	7	3	10
5	6	3★	5★	11
11	9	18	8	

0	6	5★	2	8
7	8★	5	4★	12
2	7	1★	4★	9
3★	1★	9	8	17
9	13	14	12	

## 第4章—島嶼穿梭：個位與十位加減

此謎題會提供部分數字已填寫的矩形網格，挑戰目標是填補空白數字，且需滿足兩項關鍵條件：任何兩個相鄰數字只能有一個位數值相差1(包含0與9之間的循環變化)，同時整個網格中所有數字不得重複。初學者解題時可參考百數表輔助思考。

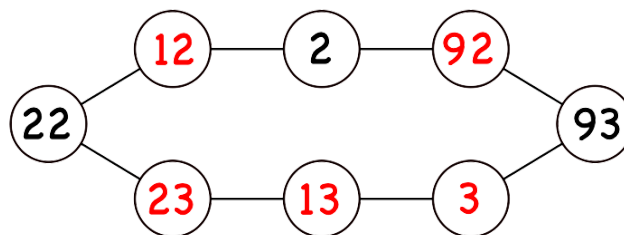
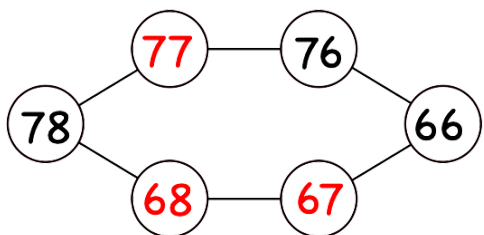
設計謎題時，請先在空白網格中填入不重複的數字，接著隱去部分數字並確保難度適中。範例中紅色數字即待填補的空白。

57	67	66	56
5	4	94	95

33	23	13
32	22	12

雖然僅使用個位數與兩位數的設計變化有限，但能有效訓練位值概念。特別要注意數字跳轉的巧妙規律，例如95→5→15或11→10→0→9的路徑，孩子可能尚未意識到個位數其實隱含十位為0的特性，也可能對0與9相連的規則感到驚奇。

網格雖是直觀的呈現方式，但亦可仿效其他島嶼穿梭謎題改用圓圈標示，此種呈現方式能為謎題結構帶來更多創作彈性。



## 第4章—紙牌形狀拼圖

### — 魔術三角形 —

用六個圓圈組成每邊三個圓圈的三角形，將數字1到6不重複地填入圓圈中，使三角形每邊的數字總和相等。這個遊戲包含雙重挑戰：既要找出可行的總和值，也要推導出對應的數字排列。最好讓孩子自行探索可能的總和值，若遇到瓶頸再提示：可能的總和為9、10、11和12。

若孩子樂在其中，可嘗試擴展到更大的三角形。例如用九個圓圈組成每邊四個圓圈的三角形時，可能的總和值為17、19、20、21和23。

這類謎題主要目的是讓孩子在探索數字的趣味互動中練習運算能力。此時他們尚未具備系統化分析所需的數學推理能力，但若您或年長的孩子有興趣深入探究，以下提供進階思路：

設SUM為三角形單邊的數字和。將三邊總和相加會得到 $3 \times \text{SUM}$ ，但這個總和同時也等於所有數字之和加上三個頂點數字的額外重複計算。設C-SUM為三個頂點數字之和，可推導出關係式： $3 \times \text{SUM} = (\text{所有數字總和}) + \text{C-SUM}$ 。

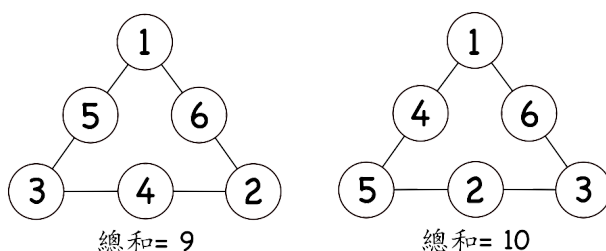
以六圓圈謎題為例：數字1到6的總和為21，因此方程式為 $3 \times \text{SUM} = 21 + \text{C-SUM}$ 。C-SUM的最小值為 $1+2+3=6$ ，最大值為 $4+5+6=15$ ，因此 $3 \times \text{SUM}$ 的範圍在27到36之間，這使得SUM只能是9、10、11、12。同時可得 $\text{C-SUM} = 3 \times \text{SUM} - 21$ ，這個公式有助於快速鎖定頂點數字。

另一個關鍵在於數值的對稱性：每個解都可以透過用7減去所有數字（九圓圈版本則用10減），生成總和為 $(21-\text{SUM})$ 的新解。透過實際計算可驗證這種對稱轉換。

在具體嘗試數字前，還可注意：任何解都可以透過旋轉或翻轉，使三個頂點數字呈從小到大順時針排列，且最小數字位於頂端。這個技巧能大幅減少嘗試次數。

綜合以上觀察，我們只需專注於SUM=9和10的情況（因11和12可透過對稱性推得），且只需考慮頂點數字遞增的配置。當SUM=9時，C-SUM=6，頂點必為1、2、3；當SUM=10時，C-SUM=9，頂點可能為1、2、6或1、3、5，而實際測試會排除1、2、6的組合。

經過深入推導，我們得出六圓圈謎題在SUM為9和10時的解答。請注意，只要將所有數字用7去減，即可從SUM=9的解答推得SUM=12的解答，從SUM=10的解答推得SUM=11的解答。



## 九圓圈謎題

採用相同思路分析：數字1到9的總和為45，因此得到關係式  $3 \times \text{SUM} = 45 + \text{C-SUM}$ 。C-SUM的最小值為  $1+2+3=6$ ，最大值為  $7+8+9=24$ ，這使得  $3 \times \text{SUM}$  的範圍落在51至69之間，因此SUM必須是17到23之間的整數。透過將數字用10相減的對稱轉換，我們得到SUM的對應組合：17對應23、18對應22、19對應21，而20則對應自身。因此只需專注求解17、18、19、20的情況，其對應的C-SUM值分別為6、9、12、15。

- SUM=17, C-SUM=6: 頂點必為1、2、3，經檢驗此配置成立
- SUM=18, C-SUM=9: 頂點可能為1、2、6或1、3、5，但兩種組合均無法成立
- SUM=19, C-SUM=12: 在眾多頂點組合中，僅1、4、7與2、3、7兩種配置可行
- SUM=20, C-SUM=15: 存在多種可行的頂點組合，例如1、5、9與2、5、8

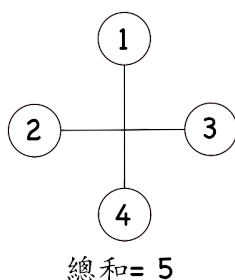
### — 魔術設計 —

這類謎題與魔法三角形類似，將數字填入幾何圖案中的圓圈，使每條直線上的數字總和相同。

分析方法與魔法三角形相通：設SUM為直線共同總和，若圖形存在中心圓圈則設其值為c。核心策略是透過累加所有直線的總和來推導數值關係，同時也可運用對稱特性：將所有數字用(最大數字+1)相減即可生成新解。就像“魔術三角”一樣，可以通過將所有條目減去比最大數量大的條目來創建新的解決方案。

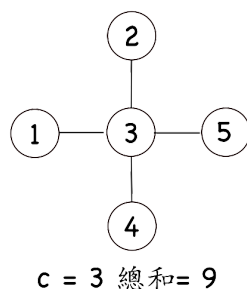
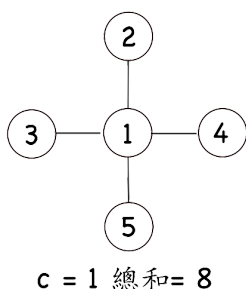
#### 1. 十字形圖案(數字1-4)

此圖形由兩條直線交錯構成，且無共享圓圈。數字1到4總和為10，均分至兩個方向後可得SUM=5，答案顯而易見。



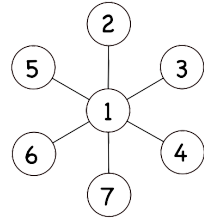
#### 2. 十字形圖案(數字1-5)

此圖形具有共同的中心圓圈。數字1到5的總和為15，將兩個方向的直線總和相加可得關係式： $2 \times \text{SUM} = 15 + c$ 。由於  $15+c$  必須為偶數，因此c的可能值為1、3、5。透過將c=1的解答用6相減，即可推得c=5(SUM=10)的對稱解。

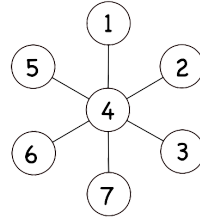


### 3. 三線交會圖案(數字1-7)

三條直線各含3個圓圈，並共享中心圓圈。將三線總和相加可得： $3 \times \text{SUM} = 28 + 2 \times c$ 。由於 $28+2c$ 需被3整除，這限制了 $c$ 必須是1、4或7。圖中已提供 $c=1$ 與 $c=4$ 的解答範例。



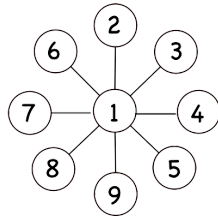
$c = 1$  總和= 10



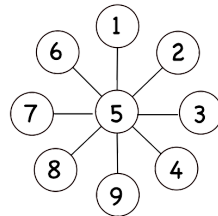
$c = 4$  總和= 12

### 4. 四線交會圖案(數字1-9)

四條直線各含3個圓圈，共享中心圓圈。四線總和關係為： $4 \times \text{SUM} = 45 + 3 \times c$ 。由於 $45+3c$ 需被4整除，因此 $c$ 只能是1、5或9。



$c = 1$  總和= 12



$c = 5$  總和= 15

### 5. L形圖案(數字1-5)

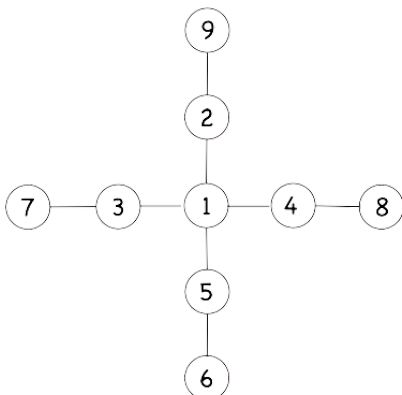
此圖形在轉角處有一個共享圓圈，其數學結構與問題2完全相同，因此解答本質上也一致。

### 6. 十字形圖案(數字1-8)

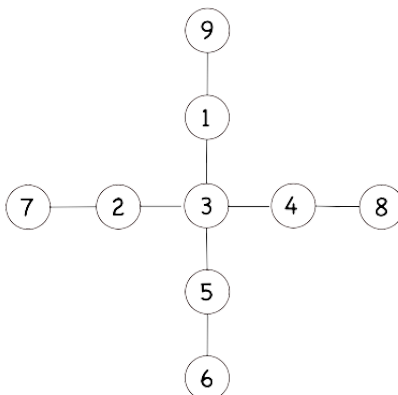
此圖形無共享圓圈，兩個方向需均分數字總和36，因此 $\text{SUM}=18$ 。可透過將數字分成兩組和為18的組合來求解，例如： $\{1,2,7,8\}$ 與 $\{3,4,5,6\}$ ，或 $\{1,3,6,8\}$ 與 $\{2,4,5,7\}$ 等多元組合。

### 7. 十字形圖案(數字1-9)

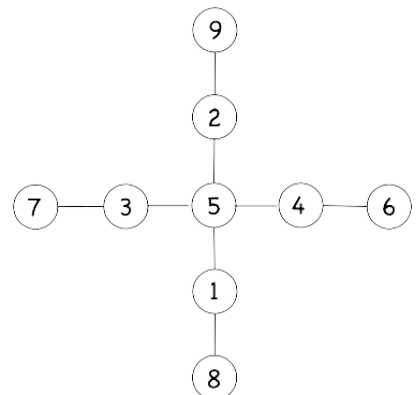
此圖形具有共同的中心圓圈。將兩個方向的直線總和相加可得關係式： $2 \times \text{SUM} = 45 + c$ 。因此 $c$ 必須是奇數，可能值為1、3、5、7、9。圖中已提供 $c=1$ 、3、5的解答範例。



$c = 1$  總和= 23



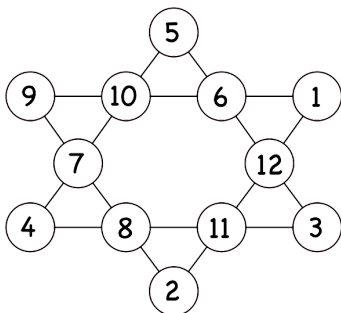
$c = 3$  總和= 24



$c = 5$  總和= 25

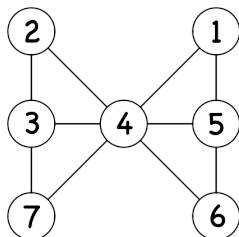
8. 星形圖案(數字1-12)

此圖包含6條直線，每條直線有4個圓圈。若將所有直線的總和相加，每個數字會被計算兩次。由於數字1到12的總和為78，可推得 $6 \times \text{SUM} = 2 \times 78$ ，因此 $\text{SUM}=26$ (如提示所示)。下方提供一組解答，另可透過將所有數字用13相減得出對稱解。



9. H形圖案(數字1-7)

此圖形包含左側3個垂直圓圈、中心1個圓圈、右側3個垂直圓圈，共形成5條由3個圓圈組成的直線。將5條直線總和相加時，所有圓圈會被計算兩次，唯獨中心圓圈被計算三次，因此得到關係式： $5 \times \text{SUM} = 2 \times 28 + c$ 。由於 $56+c$ 需被5整除，這要求 $c=4$ ，此時 $\text{SUM}=12$ (如提示所示)。需注意數字2和3不能與1位於同一側，根據此限制可推導出對應解答。



## 第4章-數字方陣求和

以一個 3x3 的方格開始，其中已標明每行與每列的目標總和，並已填入部分 1 到 9 的數字。挑戰目標是將剩餘數字填入空格，使每行與每列的數字總和符合對應的目標值。

設計此類謎題時，可先將寫有數字 1 到 9 的紙片置於 3x3 方格中，接著在每行右側與每列下方標註其數字總和，然後移除部分紙片，最後將這些被移除的數字紙片交給孩子並提問：「這些數字原本在哪裡？」由於製作過程簡便，也很適合讓孩子反過來設計題目供您解答。

若想控制總和範圍，可改用數字 0 到 8 進行遊戲；若想增加難度，可擴展為使用數字 1 到 12 的 3x4 方格，甚至使用數字 1 到 16 的 4x4 方格。

6	3	5	14
2	8	4	14
7	1	9	17
15	12	18	

6	3	5	14
2	8	4	14
7	1	9	17
15	12	18	

6	3	5	14
2	8	4	14
7	1	9	17
15	12	18	

設計原始的完整題目相當簡單，只需如前述將所有數字填入方格並計算行列總和即可。而設計者的挑戰在於：要精準移除適量的數字線索，使謎題既具挑戰性又不至於過於困難。

解題與創題策略：

建議先從填補「行列中僅缺一個數字」的空格開始。以左側謎題為例：填入 5 和 7 後，會連帶使 3 和 2 的位置變得明確，接著 8 也能輕鬆填入——這種「連鎖反應」能讓解題過程流暢推進。

這類容易推算的謎題對孩子而言是很好的練習，無需刻意追求複雜性。

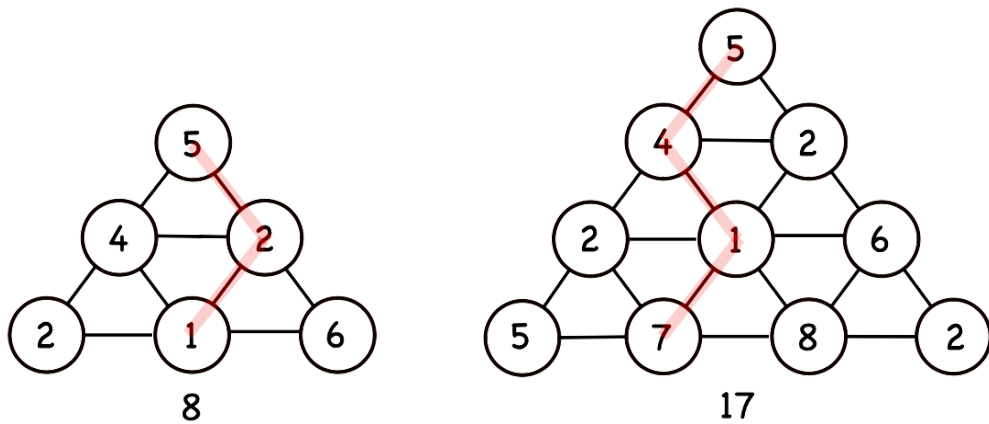
中間的謎題難度稍高，因為沒有「單一空缺」可直接填補。此時可優先關注「剩餘總和特別大或特別小」的行列，因為這些位置的數字組合可能性較少。例如在此題中，最下列的剩餘總和為 16，僅能由 7 和 9 組成；而由於 9 若與 6 同欄會使該欄總和超標，由此可鎖定 7 和 9 的具體位置，後續推導便迎刃而解。

右側謎題則隱去了兩個邊界總和值。當孩子意識到所有行列總和相加等於數字 1-9 的總和 45 時，就能輕鬆推算出缺失的邊界數值。

## 第4章-加法金字塔

此謎題提供一個包含4行共10個數字的金字塔結構與一個目標數字。挑戰在於從金字塔頂端至底端找出一條路徑，每行選取一個數字，且相鄰行的數字必須相互接觸，使路徑上所有數字的總和等於目標數字。

設計此類謎題時，可先規劃一條預期路徑並填入數字，計算其總和作為目標值，接著在其餘位置填入干擾數字。金字塔每增加一行，可能路徑的數量便會翻倍，因此若孩子能輕鬆完成10數字的謎題，可擴展更大規模的金字塔；若覺得困難，則可從6數字的簡易版開始練習。



對於大型謎題，設計者可能需確保僅存在唯一解，但不必過度拘泥於此。即使存在多條可行路徑，孩子向您展示不同解法時，同樣能享受探索的樂趣。

# 第4章—探索活動

## — 花瓣數量 —

### 探索任務

在一個魔法花園裡有兩種花：一種有4片花瓣，另一種有7片花瓣。如果請孩子採集一些花，使花瓣總數恰好是13片，可能做到嗎？那15片呢？哪些數字的花瓣數是可能達成的？對於可行的數字，是否存在多種組合方式？（例如32片花瓣可以是4朵7瓣花加1朵4瓣花，也可以是8朵4瓣花）

透過嘗試不同數字的組合，會發現豐富的規律。對某些數字組合而言，存在一個臨界點，超過該數字後的所有花瓣數都能達成；而對另一些組合則不存在這樣的臨界點。以4和7為例，從18開始的所有數字都能實現；但若是3和6，則永遠存在無法實現的數字。

這背後隱藏著什麼規律？成因又是什麼？這些問題往往能引導出精彩的發現。當兩個數字存在公因數時最容易觀察現象，以3和6為例（可視為 $1\times 3$ 和 $2\times 3$ ），將其相加永遠會得到3的倍數，因此像10這類非3倍數的數字就無法實現。

當兩個數字的唯一公因數是1時，則必定存在一個臨界點，使超過該數值的所有數字都能達成。以4和7為例，臨界點就是18。計算這個臨界點的方法：將兩個數字各減1後相乘（ $3\times 6=18$ ）。更奇妙的是，18以下的數字恰好有一半可以實現！背後原理涉及進階數學概念，雖超出幼童理解範圍，但透過實際操作計算，孩子將來接觸相關概念時，這些經驗將自然融會貫通。

## — 台階爬法計算 —

### 探索任務

假設孩子有時喜歡一次跨一階，有時喜歡一次跨兩階。那麼要爬上某段台階，總共有多少種不同的走法？

例如：

- 0 階：只有1種方式（原地不動）
- 1 階：只有1種方式（跨一階）
- 2 階：有2種方式（一次跨兩階，或分兩次各跨一階）

建議讓孩子仔細計算不同台階數的情況，並把結果整理成表格。當資料一多，表格就能幫助理清頭緒，讓規律浮現出來。表格看起來會像這樣（當然，要算到6階以上可能需要多一點耐心，這裡先把答案列出來）：

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

觀察這些數字，你的孩子可能會發現：相鄰的兩個數字加起來，剛好就是下一個數字。為什麼會這樣呢？這些數字被稱為「費波那契數列」。這個數列的法則是：每個數字都是前兩個數字的總和。而我們台階的走法數，竟然也符合這個法則！

讓我們仔細用 5 階台階來驗證一下。8 種走法分別是：1+1+1+1+1、1+1+2+1、1+2+1+1、2+1+1+1、2+2+1、1+1+1+2、1+2+2和2+1+2。可以這樣看：前面 5 種走法，最後一步都是跨 1 階；而後面 3 種走法，最後一步都是跨 2 階。這就解釋了其中的奧秘：要走上 5 階，要麼先以各種方式走上 4 階再跨 1 階，要麼先以各種方式走上 3 階再跨 2 階。所以，走上 5 階的總方法數，就剛好等於「走上 4 階的方法數」加上「走上 3 階的方法數」。

發現規律的過程，通常就是這樣：耐心嘗試範例 → 系統整理數據 → 仔細觀察比對 → 深入挖掘原因。幫助孩子培養這樣的研究習慣，將會讓他受益無窮。

## — 天平秤 —

### 探索活動

天平秤是一種簡單的工具，用來判斷兩邊的物品是否一樣重。通常我們會配備一組標準砝碼，用來測量其他物體的重量。如果限制可使用的砝碼種類，就能展開許多有趣的探究。

**單一重量砝碼：**假設你有很多砝碼，但全部都是同一種重量，例如每個都是 5 單位。那麼，你只能精確稱出重量是 5 的倍數的物體（就像是 5 為單位跳數計數一樣）。

**兩種重量砝碼 — 單側使用：**假設你有很多 4 單位和 7 單位的砝碼，並且只把它們放在天平的一側使用。那麼，你能稱出的重量，就和之前在「花瓣數量之謎」探索中能找到的數字組合一樣。對於 4 和 7 這組數字，從 18 單位開始，之後的所有整數重量都能夠被精確稱出來。但如果砝碼是 4 單位和 6 單位，那你只能稱出從 4 開始的偶數重量。從 18 個單位開始，您可以精確地稱量所有東西。如果權重是 4 單位和 6 單位，則只能以 4 開頭的偶數

**兩種重量砝碼 — 雙側使用：**當孩子完成「單側使用」兩種砝碼的探索後，如果請他們用 4 單位和 7 單位的砝碼去稱 3 單位甚至 1 單位的物品，他們可能會大吃一驚。秘訣在於將砝碼分散放在天平兩側。例如：要驗證一個物品是否為 3 單位，可以將它和一個 4 單位的砝碼放在同側，看是否與另一側的 7 單位砝碼平衡。同理，要驗證 1 單位的物品，可將它與 7 單位砝碼同放一側，看是否與另一側的兩個 4 單位砝碼平衡。

這項探索背後隱藏著一個重要的數學定理——「貝祖定理」。孩子現階段雖不需理解這個定理，但能接觸到如此深奧的數學概念，豈不是很有趣？

**倍增砝碼：**如果你擁有重量為 1、2、4、8、16 單位（即倍增序列）的砝碼各一個，能稱出多少種 13 單位的組合？最大又能稱多少重量？

經過探索你會發現，從 1 到（最大砝碼重量  $\times 2 - 1$ ）的所有重量都能被稱出，此例中即 31 單位。更奇妙的是，每種重量只有唯一一種稱量方式，例如 13 只能由 1+4+8 組成，別無他法。這現象與二進位計數系統密切相關。

**斐波那契砝碼：**若改用斐波那契數列（1, 1, 2, 3, 5, 8, 13）作為砝碼重量，會發生什麼？是否存在多種稱量方式？如何限制才能讓每種重量只有唯一稱法？

以 10 單位為例，可能組合有：2+3+5、2+8、1+1+3+5、1+1+8。出現重複的原因在於斐波那契數列本身具有多重組合性（例如 2=1+1，8=5+3）。解決方法是禁止使用數列中相鄰的兩個數字。加上這條限制後，10 單位就只剩下 2+8 這唯一稱量方式了。